

# 一种基于多小波算子的复合边缘提取方法

蔡超 丁明跃 周成平 张天序

(华中科技大学图象识别与人工智能研究所教育部信息处理与智能控制重点实验室, 武汉 430074)

**摘要** 由于光照、遮挡以及投影等因素的影响,大量自然场景图像的边缘并不表现为简单的阶跃状边缘,而是几种简单边缘的复合。复合边缘的提取和准确定位是边缘提取中的一个难点。为此,应用图像复合边缘的数学模型,从一对分别为偶对称和奇对称的多小波尺度函数出发,构造出一种对复合边缘具有零系统定位误差的多小波边缘提取算子,相应的小波函数仍然分别为偶对称和奇对称的。理论上,应用这样的多小波边缘提取算子提取图像的复合边缘可以有任意高的边缘定位精度。实验结果表明,和常用的 Canny 算子相比,应用本文所构造的多小波边缘提取算子提取的图像边缘失真较小,定位更加准确。

**关键词** 小波 多小波 边缘提取

中图法分类号: TP391 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2004)02-0134-05

## Composite Edge Detector Based on Multi-wavelet Operator

CAI Chao, DING Ming-yue, ZHOU Cheng-ping, ZHANG Tian-xu

(State Education Commission Key Lab for Image Processing and Intelligent Control Institute for Pattern Recognition and Artificial Intelligence Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074)

**Abstract** In image that results from the projection of depth or orientation discontinuity in physical scene or from the effects of illumination and shading, edges are not in general ideal step edges but more typically a combination more than one type of edge primitive (e. g., steps, pulse and ramp etc). These edge points are termed as composite edges, and composite edges detection and localization accurately is a challenge for researcher in this field. In this paper, a composite edge detector based on multi-wavelet is proposed. Take the zero systematic localization error condition as constraint, the new multi-wavelet function is constructed in spatial domain, at the same time, the scale and wavelet functions are even or odd symmetric. Theoretically, based on this approach ones have the possibility of getting arbitrary precise localization for the edges that are composed of steps and pulse with wavelet transformation. Experimental results with simulated and real gray level images demonstrated the feasibility of our edge detector, it shows that the new multi-wavelet based edge detector has a better edge detection ability than Canny edge detector and Mallat-Zhong wavelet based edge detector.

**Keywords** wavelets, multi-wavelets, edge detection

## 1 引言

边缘检测是图像处理中最基本的内容之一,它是图像理解等高层次图像处理的基础。随着小波分析理论的发展,基于小波边缘检测方法层出不穷。然而,人们把注意力主要集中在具有偶对称或奇对称性质的小波函数上<sup>[1~3]</sup>,其原因是这种小波对应的滤波器具有线性相位的特点,这对于图像边缘的准确定

位是有益的。但是具有对称性质的标量小波(scalar wavelets)的支集通常是无限长的。为了弥补标量小波这一缺陷,人们提出了多小波(multiwavelets)的概念,这种小波可以集支集有限、对称、正交等特点于一身<sup>[4]</sup>。本文的目的在于构造适合于提取复合图像边缘的多小波边缘提取算子。

人们通常把边缘分成阶梯状(step)边缘,斜坡状(ramp)边缘,以及脉冲状(pulse)边缘三大类<sup>[5~7]</sup>。大量的有关图像边缘提取的文献都是针对

阶梯状边缘,事实上由于有光照、遮挡等原因,图像边缘通常由几种边缘复合而成<sup>[5,7]</sup>。在文献[5]中给出了图像复合边缘的数学模型

$$I = c_0\delta(x) + c_1\delta^{(-1)}(x) + c_2\delta^{(-2)}(x)$$

并提出:对任何有限个数的滤波器  $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ , 总存在图像  $I = c_0\delta(x) + c_1\delta^{(-1)}(x)$  使得每一个滤波器的输出响应的最大值都偏离  $x=0$  处。该文还建议应用一个偶滤波器  $f_e$  和一个奇滤波器  $f_o$  构成平方滤波器来寻找  $W = (I * f_e)^2 + (I * f_o)^2$  的极大值,而不是  $I * f$  的极大值,以确定边缘的位置。如果奇偶滤波器满足条件

$$f_e^2(0) = -f_o^{(-1)}(0)f_o'(0) \tag{1}$$

其中

$$f^{(-1)}(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

$$f^{(-n)}(x) = (f^{(-n+1)})^{-1}(x)$$

则该平方滤波器对于脉冲状边缘和阶梯状边缘构成的复合边缘具有零系统定位误差。本文将针对这两种边缘以及由它们构成的复合边缘提出了一种基于多小波算子的边缘提取方法。

## 2 具有零系统定位误差的复合边缘多小波提取算子

小波分析在信号去噪、数据压缩、量子物理、数值分析等领域有着广泛的应用。小波理论与多分辨率分析密不可分。通常假定一个多分辨率分析是由一个尺度函数生成;由一个小波函数平移与伸缩构成  $L^2(\mathbb{R})$  空间的基。该小波函数被称为单小波 (uniwavelet) 或标量小波 (scalar-wavelet)。在更一般的情况下,一个多分辨率分析可以由多个尺度函数生成,相应的由多个小波函数平移与伸缩构成  $L^2(\mathbb{R})$  空间的基。这些小波函数被称为多小波 (multiwavelet)。在多分辨率分析中,假定  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$

在  $L^2(\mathbb{R})$  的平移  $\{\varphi_i(x-k); 1 \leq i \leq r, k \in \mathbb{Z}\}$  构成  $V_0$  空间的 Riesz 基,记  $\Phi = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r]^T$ , 则称  $\Phi$  为多尺度函数 (multi-scaling function), 它满足双尺度方程

$$\Phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k \Phi(2x - k) \tag{2}$$

记 Hurwitz 块矩阵  $\bar{C} = [C_{j-2i}]_{i,j \in \mathbb{Z}}$  以及向量  $\bar{\Phi}(x) = [\dots, \Phi(x+1)^T, \Phi(x)^T, \Phi(x-1)^T, \dots]^T$ , 则双尺度方程式 (2) 可表示为以下更紧凑的形式<sup>[8]</sup>

$$\bar{\Phi}(x) = \bar{C}\bar{\Phi}(2x) \tag{3}$$

克莱姆 (Gram) 矩阵  $\bar{F}$  在多尺度函数和多小波理论中起着重要的作用,它是一个托普里茨 (toeplitz) 块矩阵,定义为

$$\bar{F} = \langle \bar{\Phi}(\cdot), \bar{\Phi}(\cdot) \rangle \tag{4}$$

对于一个  $r$  重的多分辨率分析 (MRA)  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}, V_j = \overline{\text{span}\{2^{j/2}\varphi_i(2^j \cdot -k); 1 \leq i \leq r, k \in \mathbb{Z}\}}$ , 可以定义  $V_j$  的补空间  $W_j$ , 若向量值函数  $\Psi = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r\}^T \in L^2(\mathbb{R}^r)$  满足

$$W_j = \overline{\text{span}\{2^{j/2}\varphi_i(2^j \cdot -k); 1 \leq i \leq r, k \in \mathbb{Z}\}}$$

则称  $\Psi$  为多小波函数,它满足下面的双尺度关系

$$\Psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} D_k \Phi(2x - k) \tag{5}$$

其中,  $D_k$  是  $r \times r$  的矩阵,该双尺度关系同样可用更紧凑的形式表示为

$$\bar{\Psi}(x) = \bar{D}\bar{\Phi}(2x) \tag{6}$$

这里  $\bar{D} = [D_{j-2i}]_{i,j \in \mathbb{Z}}, \bar{\Psi}(x) = [\dots, \Psi(x+1)^T, \Psi(x)^T, \Psi(x-1)^T, \dots]^T$ 。

如果给定多尺度函数  $\bar{\Phi}$  及其对应的双尺度矩阵  $\bar{C}$  和克莱姆矩阵  $\bar{F}$ , 则满足双尺度关系式 (6) 的向量值函数  $\bar{\Psi}$  正交于多尺度函数  $\bar{\Phi}$  的充要条件为<sup>[8]</sup>

$$\bar{C}\bar{F}\bar{D}^T = 0 \tag{7}$$

在有限支集的情况下,比如多尺度函数的支集为  $[-M, M]$ , 由多尺度函数构造半正交多小波函数的矩阵方程式 (7) 可化为如下有限形式

$$\begin{bmatrix} E_{3M-2} & E_{3M-1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ E_{3M-4} & E_{3M-3} & E_{3M-2} & E_{3M-1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & E_{-3M+1} & E_{-3M+2} & E_{-3M+3} & E_{-3M+4} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & E_{-3M+1} & E_{-3M+2} \end{bmatrix}_{N \times (N+1)} \begin{bmatrix} D_{-3M+1}^T \\ D_{-3M+2}^T \\ \vdots \\ D_{-2}^T \\ D_{-1}^T \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

这里  $E_j = \sum_{i=-M}^M C_i F_{i-j}, j = -3M+1, \dots, 3M-1, F_k = \langle \Phi(x), \Phi(x-k) \rangle, k \in \mathbb{Z}$ 。

方程式 (8) 是一个含有  $6M-1$  个未知量而只有  $N=6M-2$  个条件的分块线性系统,要确定方程的

解必须另外加一个限制条件。这里要求所构造出来的多小波用于边缘检测时具有零系统定位误差,在这一限制条件下就可以唯一确定一个多小波函数。

应用重数为  $r=2$  的多小波,记

$$D_k = \begin{bmatrix} d_{11}^{(k)} & d_{12}^{(k)} \\ d_{21}^{(k)} & d_{22}^{(k)} \end{bmatrix}$$

为保证两重小波的两个小波函数为对称的,系数  $D_0$  应具有如下的形式

$$D_0 = \begin{bmatrix} d_{11}^{(0)} & 0 \\ 0 & d_{22}^{(0)} \end{bmatrix} \quad (9)$$

如果要求两重小波的两个小波函数满足条件式(1),应用双尺度方程式(2)易得下面的小波系数关系式

$$(D_{11}\bar{\varphi}_e(0) + D_{12}\bar{\varphi}_o(0))^2 = -(D_{21}\bar{\varphi}_e^{(-1)}(0) + D_{22}\bar{\varphi}_o^{(-1)}(0)) \times (D_{21}\bar{\varphi}_e'(0) + D_{22}\bar{\varphi}_o'(0)) \quad (10)$$

这里  $D_{ij} = [d_{ij}^{3M+1}, d_{ij}^{3M+2}, \dots, d_{ij}^{3M-1}]$ ,  $i, j = 1, 2$ ,  $\bar{\varphi}_e(x) = [\varphi_e(x+3M-1), \varphi_e(x+3M-2), \dots, \varphi_e(x-3M+1)]^T$ ,  $\bar{\varphi}_o(x) = [\varphi_o(x+3M-1), \varphi_o(x+3M-2), \dots, \varphi_o(x-3M+1)]^T$ .

为了能够较好地定位脉冲状边缘和阶梯状边缘构成的复合边缘,要构造的多小波系数应满足半正交方程式(8)、对称条件式(9)和零定位误差条件式(10)。从三次 Hermite 函数出发,应用上述条件构造小波函数。

Hermite Cubic 函数定义如下:

$$\varphi_e(x) = \begin{cases} (x+1)^2(1-2x) & x \in [-1, 0) \\ (1-x)^2(2x+1) & x \in [0, 1] \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (11)$$

$$\varphi_o(x) = \begin{cases} (x+1)^2x & x \in [-1, 0) \\ x(x-1)^2 & x \in [0, 1] \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

该函数构成多分辨率分析的基函数,其双尺度系数为

$$C_{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}, C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

对于该尺度函数,零系统定位误差条件式(10)化减为

$$(d_{11}^{(0)})^2 = - \left( d_{21}^{(-2)} + d_{21}^{(-1)} - \frac{1}{12}d_{22}^{(0)} \right) d_{22}^{(0)} \quad (12)$$

求解方程式(8)、式(12)并应用对称条件式(9)可得  $D_{-2}, D_{-1}, D_0, D_1, D_2$  如下:

$$D_{-2} = \begin{bmatrix} 0.0580 & 0.1534 \\ 0.3038 & 0.8038 \end{bmatrix}, D_{-1} = \begin{bmatrix} -0.1740 & -0.1534 \\ -0.3038 & -0.1962 \end{bmatrix},$$

$$D_0 = \begin{bmatrix} 0.2320 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} -0.1740 & 0.1534 \\ 0.3038 & -0.1962 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0.0580 & -0.1534 \\ -0.3038 & 0.8038 \end{bmatrix}$$

相应的尺度函数和小波函数如图 1、图 2 所示。

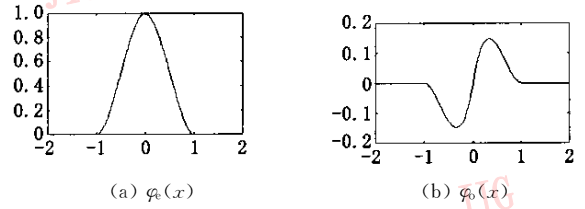


图 1 Cubic 尺度函数

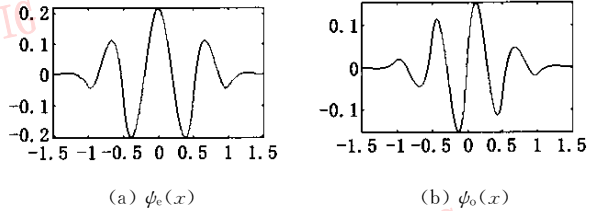


图 2 本文所构造的小波函数

### 3 多小波边缘提取方法

用重复行算法对二维图像数据  $I_0$  分别作行和列的一层分解,结果如下

$$\begin{matrix} L_e L_e & L_o L_e & H_e L_e & H_o L_e \\ L_e L_o & L_o L_o & H_e L_o & H_o L_o \\ L_e H_e & L_o H_e & H_e H_e & H_o H_e \\ L_e L_o & L_o H_o & H_e H_o & H_o H_o \end{matrix} \quad (13)$$

这里具有代表性的矩阵块  $H_o L_e$  表示用偶对称尺度函数对应的低通滤波器沿水平方向滤波后再用奇对称小波函数对应的高通滤波器沿竖直方向滤波得到的滤波系数。

定义水平方向的平方滤波器输出为

$$\begin{matrix} W_{he} = W_{he}^+ + W_{he}^- \\ W_{ho} = W_{ho}^+ + W_{ho}^- \end{matrix} \quad (14)$$

这里

$$\begin{matrix} W_{he}^+ = ((L_e H_e)^+)^2 + ((L_e H_o)^+)^2 \\ W_{he}^- = ((L_e H_e)^-)^2 + ((L_e H_o)^-)^2 \\ W_{ho}^+ = ((L_o H_e)^+)^2 + ((L_o H_o)^+)^2 \\ W_{ho}^- = ((L_o H_e)^-)^2 + ((L_o H_o)^-)^2 \end{matrix}$$

而  $F^+$  和  $F^-$  的定义为  $F^+ = \begin{cases} F & \text{如果 } F \geq 0 \\ 0 & \text{如果 } F < 0 \end{cases}$ ,

$$F^- = \begin{cases} -F & \text{如果 } F < 0 \\ 0 & \text{如果 } F \geq 0 \end{cases}$$

同样竖直方向的平方滤波器输出为

$$\begin{matrix} W_{ve} = W_{ve}^+ + W_{ve}^- \\ W_{vo} = W_{vo}^+ + W_{vo}^- \end{matrix} \quad (15)$$

于是输入图像的梯度向量模定义为

$$M_e = \sqrt{W_{he} + W_{ve}} \quad \text{或} \quad M_o = \sqrt{W_{vo} + W_{vo}} \quad (16)$$

低通滤波器  $L_e$  对应于偶对称尺度函数  $\varphi_e(x)$ ,

实验中选取  $M_e = \sqrt{W_{he} + W_{ve}}$  作为输入图像的梯度向量输出。这时的  $M_e$  相当于先对输入图像沿一个方向进行光滑处理后再沿垂直的方向求取梯度,从而降低了噪声的影响。相应的方向角定义为

$$A_e = \text{Arg}[(W_{he}^+ - W_{he}^-) + i(W_{ve}^+ - W_{ve}^-)] \quad (17)$$

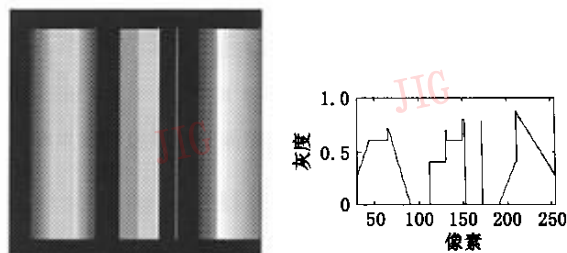
取输出梯度向量的模极大值超过某一门限的点为图像的边缘点,分别以  $M_e$  和  $A_e$  定义边缘点的强度和方向。为了进一步减少噪声对边缘提取的影响,上述边缘提取过程可以在较粗尺度下进行,甚至可以利用多尺度边缘跟踪的方法获得对噪声的更具鲁棒性。

### 4 试验结果

分别以一系列的人工合成图像和真实图像做边缘检测试验。人工合成图像和真实图像的大小都是  $256 \times 256$ , 256 个灰度级。选取常用的 Canny 算子、

Prewitt 算子以及 Mallat-Zhong 单小波边缘检测算子<sup>[1]</sup>。边缘检测过程中,在取门限之前除把图像的边缘强度作了归一化处理外,没有再做其他任何的预处理和后处理。

从图 3(b)可以看出该合成图像包含了几种理想的复合边缘。图 4 是分别用 Canny 算子、Prewitt 算子以及本文构造的 Cubic 半正交多小波边缘检测的结果。可以看出 Canny 算子的边缘定位有较大误差, Prewitt 算子检测的边缘很不整齐, 本文提出的边缘检测算子检测的边缘最为精确。



(a) 合成图像 (b) 合成图像的水平方向灰度变化曲线

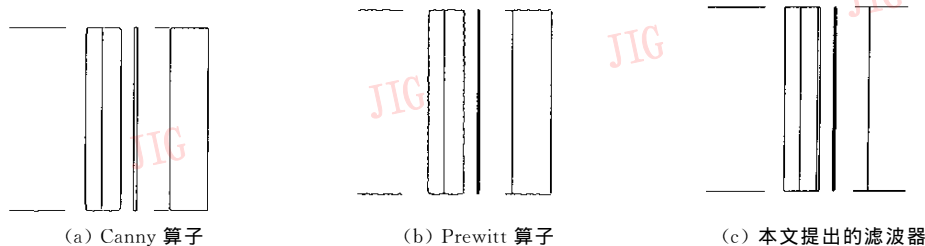


图 4 边缘检测结果

图 5 是代表不同类型的 3 幅真实图像的缩小显示,图 6 为 Lena 图像的边缘检测结果对比。从图 6 中可以看出,在细尺度下,Canny 算子对边缘特征有明显的扭曲, Mallat-Zhong 小波边缘检测算子受噪声影响较为明显, 本文提出的算法则较好地抑制了噪声并保留了图像特征细节,而在粗尺度下,则更加明显地体现了本文提出算法的这一优越性。如图 7、图 8 所示, 本文提出的算法与 Canny 算子和 Mallat-Zhong 小波边缘检测算子相比,对不同类型的真实

图像都有明显的优越性。

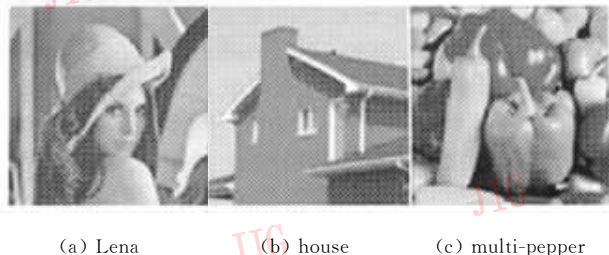


图 5 真实图像

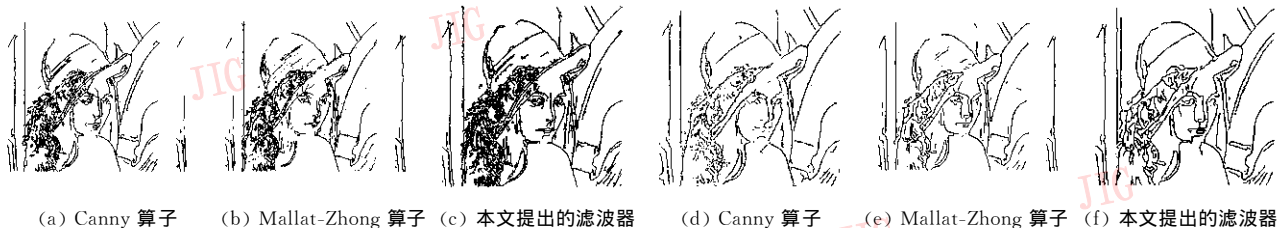
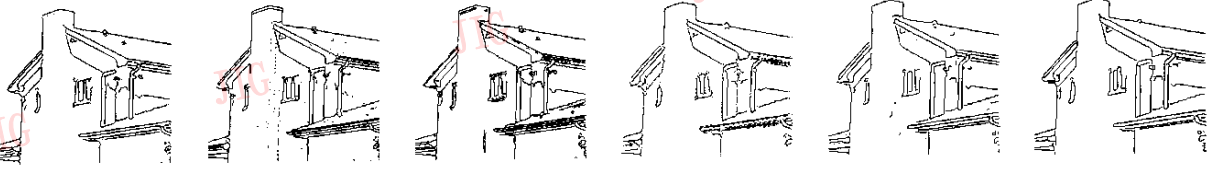


图 6 Lena 图像的边缘检测结果对比(其中(a)~(c): $s=1, a=2^0$ ; (d)~(f): $s=2, a=2^1$ )



(a) Canny 算子 (b) Mallat-Zhong 算子 (c) 本文提出的滤波器 (d) Canny 算子 (e) Mallat-Zhong 算子 (f) 本文提出的滤波器

图 7 house 图像的边缘检测结果对比(其中(a)~(c): $s=1, a=2^0$ ; (d)~(f): $s=2, a=2^1$ )



(a) Canny 算子 (b) Mallat-Zhong 算子 (c) 本文提出的滤波器 (d) Canny 算子 (e) Mallat-Zhong 算子 (f) 本文提出的滤波器

图 8 multi-pepper 图像的边缘检测结果对比(其中(a)~(c): $s=1, a=2^0$ ; (d)~(f): $s=2, a=2^1$ )

## 5 结 论

本文构造的多小波函数针对脉冲状边缘和阶梯状边缘及其构成的复合边缘有较好的检测效果,而对于另一类同样广泛的边缘类型——斜坡状边缘却没有详细讨论,原因是如果同时考虑这 3 类边缘模型构造小波函数的过程将会更加复杂。如何简化构造以适应于上述 3 种类型边缘的小波函数需要进一步的研究。

### 参 考 文 献

- Mallat S, Zhong S. Characterization of signals from multiscale edges [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis Machine Intelligence, 1992, 14(7):710~732.
- Sun M, Scalbassl R J, Li C C, et al. Symmetrical wavelet transforms for edge location [J]. Optical Engineering, 1994, 33(7):2272~2281.
- Beltran J, Garcia-Lucia J, Navarro J. Edge detection and classification using Mallat's wavelet[A]. In: Proceeding of First IEEE International Conference on Image Processing [C], Austin, Texas, USA:1994, 1(1):293~297.
- Strela V, Heller P N, Strange G, et al. The application of multiwavelet filter banks to image processing [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1999, 8(4):548~563.
- Perona P, Malik J. Detection and localizing edges composed of steps, peaks and roofs [A]. In: Proceeding of the Third International Conference on Computer Vision [C], Osaka, Japan, 1990:52~57.
- Ghosal S, Mehrotra R. Detection of composite edges[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1994, 3(1):14~25.
- Eom K B, Kashyap R, Systems L. Composite edge detection

with random field models [J]. IEEE Transactions on Systems Man and Cykesnatics, 1990, 20(1):81~93.

- Cotronei M, Montefusco L B, Puccio L. Multiwavelet analysis and signal processing [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems- II Analog and Digital Sigal Processing, 1998, 45(8): 970~987.



蔡超 1971 年生,1997 年获华中理工大学(现华中科技大学)硕士学位,现为华中科技大学图象识别与人工智能研究所讲师,在职博士生。主要从事小波分析、图像匹配、目标识别与跟踪、数据可视化等研究。



丁明跃 1961 年生,华中科技大学图象识别与人工智能研究所副所长,教授,博士生导师,1991 年至 1993 年获德国洪堡研究基金,在德国不伦瑞克工业大学机器人研究所从事博士后研究工作。主要研究领域包括计算机视觉、路径规划、目标识别与跟踪等。



周成平 1957 年生,华中科技大学图象识别与人工智能研究所副教授。主要研究方向为图像处理、计算机视觉、任务规划等。



张天序 1947 年生,华中科技大学图象识别与人工智能研究所所长,教授,博士生导师。主要研究方向为图像信号分析、机器视觉、精确制导智能化信息处理等。